

**Key concepts:**

- 正常返;
- 遍历定理;
- 不变分布的存在性与唯一性。

本节课接着常返性的内容，考虑  $n \rightarrow \infty$  的情形，继续研究随时间推移，Markov链转移的规律。由上一节课中 Corollary 5.12，若状态  $j$  是暂留的，那么对任意状态  $i$ ，

$$P_{ij}^{(n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

所以本节课我们只考虑常返状态。

## 6.1 弱遍历定理

假设状态  $i$  是常返的，那么从状态  $i$  出发迟早回到状态  $i$  的概率

$$f_{ii} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$$

把  $\{f_{ii}^{(n)}\}$  看成正整数集合上的分布，我们可以定义返回状态  $i$  的平均转移次数。

**Definition 6.1 (平均返回时间)**

常返状态  $i$  的平均返回时间定义为

$$\mu_{ii} \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

利用平均返回时间可以进一步对常返状态进行分类

**Definition 6.2 (正常返)** 假设状态*i*是常返的, 如果 $\mu_{ii} < \infty$ , 则称状态*i*正常返(*positive recurrent*); 否则, 若 $\mu_{ii} = \infty$ , 则称状态*i*零常返(*null recurrent*)。

**Theorem 6.3 (弱遍历定理)** 设 $\{X_n\}$ 是不可约常返的*Markov*链, 那么对任意状态*i, j*,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

**Proof:** 先给出一个引理

**Lemma 6.4 (Hardy–Littlewood Tauberian theorem)** 设 $a_n \geq 0, \forall n$ , 记幂级数 $A(z)$ 为

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad 0 \leq z < 1$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)A(z)$$

设 $P_{ij}(z) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n$ , 由引理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n$$

回顾定理5.11的证明中, 我们已经知道:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} z^n = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ij}^{(k)} z^k) \sum_{k=0}^{\infty} (P_{jj}^{(k)} z^k)$$

设 $F_{ij}(z) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n$ 。当 $i \neq j$ 时, 由Abel定理

$$F_{ij}(1^-) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$$

所以

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)F_{ij}(z)P_{jj}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)P_{jj}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1-z}{1-F_{jj}(z)}$$

当  $i = j$  时, 直接有

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)P_{jj}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1-z}{1-F_{jj}(z)}$$

即对任意  $i$ , 都有

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} (1-z)P_{ij}(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1-z}{1-F_{jj}(z)} = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1}{F'_{jj}(z)}.$$

由Abel定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} z^{n-1}} = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

注.  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)}$  具有明确的概率含义,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbf{I}_{[X_k=j|X_0=i]}] \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}[\#\{n > k \geq 0 : X_k = j | X_0 = i\}] \end{aligned}$$

其中  $\#A$  表示集合  $A$  中元素的个数。所以  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)}$  表示在  $n-1$  步转移中, 处于状态  $j$  的次数与记录状态总数  $n$  的比值。

和常返性一样, 正常返也具有类的性质, 即下面命题:

**Proposition 6.5** 若  $i$  正常返,  $i \rightarrow j$ , 那么  $j$  也正常返。

**Proof:** 由于  $i \rightarrow j$ , 那么存在  $m$ , 使得  $P_{ij}^{(m)} > 0$ , 由CK方程,

$$P_{kj}^{(l+m)} = \sum_{s \in E} P_{ks}^{(l)} P_{sj}^{(m)} \geq P_{ki}^{(l)} P_{ij}^{(m)}$$

不等式两端对  $l$  求和平均,

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{kj}^{(l+m)} \geq \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P_{ki}^{(l)} P_{ij}^{(m)}$$

两端同时令  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{\mu_{jj}} \geq \frac{P_{ij}^{(m)}}{\mu_{ii}} > 0$$

故  $\mu_{jj} < \infty$ , 所以  $j$  正常返。 ■

进一步, 如果Markov链的状态是有限的, 和常返性一样, 有下面结论:

**Proposition 6.6** 有限状态Markov链必然存在正常返态。

**Proof:** 反证法, 若命题不成立。设状态空间  $E = \{1, 2, \dots, N\}$ , 则所有状态都是暂留的或者零常返的。固定状态  $i$ , 对任意  $j$ , 由弱遍历定理,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

那么对有限的  $N$ ,

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

然而, 由概率转移矩阵的性质: 对任意  $k$ ,  $\sum_{j=1}^N P_{ij}^{(k)} = 1$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = 1$$

矛盾! 故命题成立。 ■

注. 结合推论6.5可知, 状态有限的不可约Markov链, 所有状态都是正常返态。

## 6.2 不变分布的存在唯一性

本节我们利用弱遍历定理回答关于不变分布的问题:

1. 如果不变分布存在, 什么条件下具有唯一性?
2. 不变分布在什么条件下存在?

首先回答第一个问题，即下面定理

**Theorem 6.7** 设 $\{X_n\}$ 是不可约常返的Markov链， $\pi$ 是 $P$ 的一个不变分布，即满足不变方程 $\pi = \pi P$ ，则对任意状态 $j$ ，都有 $\pi_j > 0$ ，且

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

**Proof:** 先给出一个引理

**Lemma 6.8 (有界收敛定理)** 设 $X_1, X_2, \dots$ 为随机变量序列，依概率收敛于 $X$ 。若存在 $M > 0$ ，使得对任意 $n \geq 1$ ， $P(|X_n| \leq M) = 1$ ，那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n] = \mathbb{E}[X]$$

**Proof:** 首先，由于 $X_n$ 依概率收敛于 $X$ ，且 $P(|X_n| \leq M) = 1$ ，所以对任意 $\epsilon > 0$

$$P(|X| > M + \epsilon) \leq P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$$

即 $P(|X| \leq M) = 1$ 。其次，对任意 $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n - X|] &= \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbf{I}_{|X_n - X| > \epsilon}] + \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbf{I}_{|X_n - X| \leq \epsilon}] \\ &\leq \mathbb{E}[ (|X_n| + |X|) \mathbf{I}_{|X_n - X| > \epsilon} ] + \epsilon \\ &\leq 2MP (|X_n - X| > \epsilon) + \epsilon. \end{aligned}$$

最后，令 $n \rightarrow \infty$ 可得，

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \epsilon$$

再令 $\epsilon \rightarrow 0$ 即证。 ■

更多极限与积分交换顺序参考《测度与概率教程》，任佳刚，巫静，第4章。

回到原命题，对任意状态 $i$ ，由于 $\sum_{s \in E} \pi_s = 1$ ，所以存在 $j \in E$ ，使得 $\pi_j > 0$ 。对于任意状态 $i$ ，由于 $\{X_n\}$ 不可约，所以 $j \rightarrow i$ ，故存在 $n$ ，使得 $P_{ji}^{(n)} > 0$ ，那么

$$\pi_i = \sum_{k \in E} \pi_k P_{ki}^{(n)} \geq \pi_j P_{ji}^{(n)} > 0$$

命题第一部分得证。

不妨考虑 $\{X_n\}$ 初始分布为 $\pi$ ，由于 $\pi$ 是不变分布，所以对任意 $k$ ， $P(X_k = j) = \pi_j$ ，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{X_0 \sim \pi} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \right] &= \mathbb{E}_{X_0 \sim \pi} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[\mathbf{I}_{X_k=j} | X_0=i] \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = j) = \pi_j\end{aligned}$$

由于 $0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \leq 1$ ，所以由有界收敛定理+弱遍历定理

$$\begin{aligned}\pi_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{X_0 \sim \pi} \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \right] \\ &= \mathbb{E}_{X_0 \sim \pi} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \right] = \mathbb{E}_{X_0 \sim \pi} \left[ \frac{1}{\mu_{jj}} \right] = \frac{1}{\mu_{jj}}\end{aligned}$$

■

注. 上面的命题表明，对于不可约常返Markov链，不变分布如果存在，则是唯一的，并且 $\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}} > 0$ ，那么对任意状态 $j$ ，

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j} < \infty$$

这说明：如果不变分布存在，就有所有状态都是正常返的。

下面我们证明其逆命题，也就是若 $\mu_{jj} < \infty$ ，令 $\pi_i = 1/\mu_{jj}$ ，则 $\pi$ 就是不变分布，这回答了：不变分布在什么条件下存在？

**Theorem 6.9** 不可约正常返的Markov链存在平稳分布。

**Proof:** 由弱遍历定理，对不可约正常返Markov链中的任意状态 $i, j$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_{jj}} \triangleq p_j > 0$$

我们下面证明  $p = (p_0, p_1, \dots)$  为一个不变分布，即满足不变方程  $p = pP$ ，且是一个概率分布。

先证不变方程  $p = pP$  成立。由C-K方程

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l \in E} \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{il}^{(k)} \right) P_{lj}$$

由于  $\frac{1}{n}(P_{ij}^{(n)} - P_{ij}^{(0)}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ,

$$p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k+1)}$$

由于  $0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \leq 1$ ，所以由有界收敛定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l \in E} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{il}^{(k)} \right) P_{lj}$$

即得不变方程

$$p_j = \sum_{l \in E} p_l P_{lj}$$

再证  $p$  是一个概率分布，即  $\sum_{l \in E} p_l = 1$ 。由于对任意  $k$

$$p = pP \implies p = pP^k$$

所以

$$p_j = \sum_{l \in E} p_l \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{lj}^{(k)} \right)$$

由于  $0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \leq 1$ ，所以由有界收敛定理

$$\begin{aligned} p_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l \in E} p_l \left( \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{lj}^{(k)} \right) \\ &= \sum_{l \in E} p_l \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{lj}^{(k)} \right) = p_j \sum_{l \in E} p_l \end{aligned}$$

所以  $\sum_{l \in E} p_l = 1$ 。 ■

我们已经知道了弱遍历极限和不变分布的关系，可以得到弱遍历定理的另一个形式：

**Theorem 6.10 (弱遍历定理)** 设 $\{X_n\}$ 是不可约正常返的Markov链,  $\pi$ 是不变分布, 那么对任意状态 $i, j$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} = \pi_j$$

更一般地, 可以得到下面的平均遍历定理

**Theorem 6.11 (平均遍历定理)** 设 $\{X_n\}$ 是不可约常返的Markov链,  $\pi$ 是不变分布,  $f$ 是 $E$ 上的函数, 满足 $\sum_{i \in E} \pi_i |f(i)| < \infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i \in E} \pi_i f(i)$$

**Proof:** 参考《应用随机过程》, 陈大岳、章复熹, 北京大学出版社, 2023, P118, P124-P128. ■

**注1.** 遍历定理说明了长时间尺度下, 函数 $f$ 的时间平均, 等于在空间上平均。这意味着系统的长期统计行为可以由其稳态分布完全描述。此外, 在计算科学中, 经常会处理高维空间上积分计算的问题, 即 $E$ 是高维空间, 那么由遍历定理, 即可通过构造遍历的Markov过程, 通过计算时间上的一维积分, 取极限得到高维积分的结果。

**注2.** 遍历定理可以视为大数定律在Markov依赖结构下的推广。大数定律适用于独立同分布的随机变量, 表明样本均值收敛到期望; 而遍历定理适用于具有Markov性的序列, 表明时间平均收敛到平稳分布下的期望。两者都揭示了“平均行为的稳定性”, 但遍历定理处理的是更一般的Markov依赖的情况。

## 6.3 强遍历定理

常返性和弱遍历定理虽然给出了随Markov链转移状态的渐近规律, 但是当 $n \rightarrow \infty$ 时, 转移概率 $P_{ij}^{(n)}$ 的极限情况我们仍然不清楚。先看一个例子。

**Example 6.12 (两状态的Markov链 III)** 考虑Markov链, 状态空间为 $\{0, 1\}$ , 转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha, \beta \in (0, 1)$ 。

$$P^n = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1 - \alpha - \beta)^n}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$$

转移概率的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & \\ & \pi \end{pmatrix},$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$ . 但是, 如果 $\alpha = \beta = 1$ , 即

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

计算容易发现规律

$$P_{00}^{(n)} = P_{11}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ 0, & n = 2k - 1 \end{cases}$$

有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{00}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{11}^{(n)} = \frac{1}{2}$$

该Markov链正常返, 平均返回时间为2。然而,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{00}^{(n)}$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{11}^{(n)}$ 都不存在。

这个例子说明了弱遍历性无法得到 $P_{ij}^{(n)}$ 的极限性质, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(n)} = \pi_j \not\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

也就是说, 对于正常返的Markov链,  $P_{ij}^{(n)}$ 的极限也可能不存在。事实上, 状态的周期性对于转移概率的极限是否存在起着关键作用。

**Theorem 6.13 (强遍历定理)** 设 $\{X_n\}$ 是不可约非周期的Markov链, 若 $\pi$ 是 $P$ 的不变分布, 那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in E} |P_{ij}^{(n)} - \pi_j| = 0, \quad \forall i \in E.$$

那么自然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall i, j \in E.$$

**Proof:** 设 $\{X_n : n \geq 0\}$ 和 $\{Y_n : n \geq 0\}$ 是 $E$ 上以 $P$ 为转移矩阵的相互独立的Markov链, 初分布分别为 $\mu$ 和 $\nu$ . 令

$$\{Z_n = (X_n, Y_n) : n \geq 0\}$$

则它为 $E \times E$ 上以 $\mu \times \nu$ 为初分布的马氏链, 转移矩阵记为

$$\bar{P} \triangleq P \otimes P,$$

其中 $\otimes$ 表示Kronecker积, 即

$$\bar{P}_{(i,j)(k,l)} = P_{ik}P_{jl}, \quad \forall (i,j), (k,l) \in E \times E.$$

自行验证 $\bar{P}_{(i,j)(k,l)}^{(n)} = P_{ik}^{(n)}P_{jl}^{(n)}$ .

**Step1.** 证明 $Z_n$ 不可约。

**Lemma 6.14** 若 $P$ 不可约非周期, 对任意状态 $i, j \in E$ , 存在 $N(i, j)$ , 使得当 $n > N(i, j)$ 时

$$P_{ij}^{(n)} > 0$$

证明参考: Levin D A, Peres Y. Markov chains and mixing times[M]. American Mathematical Soc., 2017. Proposition 1.7.

由于 $P$ 不可约非周期, 由引理6.14, 对 $\forall (i, j), (k, l) \in E \times E$ , 存在 $N_1(i, k), N_2(j, l)$ , 使得

$$P_{ik}^{(n_1)} > 0, P_{jl}^{(n_2)} > 0, \quad \forall n_1 > N_1(i, k), n_2 > N_2(j, l)$$

当 $n > \max\{N_1(i, k), N_2(j, l)\}$ 时,

$$\bar{P}_{(i,j)(k,l)}^{(n)} = P_{ik}^{(n)}P_{jl}^{(n)} > 0$$

即 $\bar{P}$ 不可约。

**Step2.**  $\bar{P}$ 的不变分布为

$$\bar{\pi}_{(i,j)} = \pi_i \pi_j$$

不难自行验证。

**Step3.** 证明 $\{X_n : n \geq 0\}$ 与 $\{Y_n : n \geq 0\}$ 迟早相遇。

因为 $\bar{P}$ 不可约且存在不变分布，那么 $Z_n$ 是常返的。令

$$\tau = \inf\{n \geq 0 : X_n = Y_n\}.$$

它是 $\{X_n : n \geq 0\}$ 与 $\{Y_n : n \geq 0\}$ 的相遇时刻，即 $\{Z_n : n \geq 0\}$ 首达对角线

$$\bar{D} \triangleq \{(i, i) : i \in E\}$$

的时间，他不会超过 $Z_n$ 首达某个具体状态 $(i, i)$ 的时间，即

$$\tau \leq \tau_{(i,i)} \triangleq \inf\{n \geq 0 : Z_n = (i, i)\}$$

由于 $Z_n$ 常返，所以

$$P(\tau_{(i,i)} < \infty) = 1.$$

那么 $P(\tau < \infty) = 1$ .

**Step4.** 证明在 $\{X_n : n \geq 0\}$ 与 $\{Y_n : n \geq 0\}$ 相遇之后，它们有同样的分布，即

$$P(X_n = j, \tau \leq n) = P(Y_n = j, \tau \leq n)$$

假设 $\{X_n : n \geq 0\}$ 与 $\{Y_n : n \geq 0\}$ 在时刻 $m$ 相遇于状态 $i$ 。

直观上，那么从时刻 $m$ 开始重新计时的话，它们都是从 $i$ 出发以 $P$ 为转移矩阵的马氏链，从而它们在任何时刻有相同的分布。严格的证明如下：

$$\begin{aligned} P(X_n = j, \tau \leq n) &= \sum_{m=0}^n \sum_{i \in E} P(X_n = j, \tau = m, Z_m = (i, i)) \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{i \in E} P(\tau = m, Z_m = (i, i)) P(X_n = j | \tau = m, Z_m = (i, i)). \end{aligned}$$

注意到

$$\{\tau = m, Z_m = (i, i)\} = \{Z_0, \dots, Z_{m-1} \notin \bar{D}, Z_m = (i, i)\}.$$

把 $m$ 视为现在的时间, 令 $A_j \triangleq \{(j, k), k \in E\}$ ,  $j \in E$ , 由 $Z_n$ 的Markov性

$$\begin{aligned} P(X_n = j | \tau = m, Z_m = (i, i)) &= P(Z_n \in A_j | \tau = m, Z_m = (i, i)) \\ &= P(X_n = j | Z_m = (i, i)) \\ &= P(X_n = j | X_m = i, Y_m = i) \\ &= P(X_n = j | X_m = i) = P_{ij}^{(n-m)}. \quad (X_n, Y_n \text{独立}) \end{aligned}$$

所以

$$P(X_n = j, \tau \leq n) = \sum_{m=0}^n \sum_{i \in E} P(\tau = m, Z_m = (i, i)) P_{ij}^{(n-m)}.$$

同理,

$$\begin{aligned} P(Y_n = j, \tau \leq n) &= \sum_{m=0}^n \sum_{i \in E} P(\tau = m, Z_m = (i, i)) P(Y_n = j | Z_m = (i, i)) \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{i \in E} P(\tau = m, Z_m = (i, i)) P_{ij}^{(n-m)}. \end{aligned}$$

因此 $P(X_n = j, \tau \leq n) = P(Y_n = j, \tau \leq n)$ .

**Step5.** 注意到

$$P(X_n = j) = P(X_n = j, \tau \leq n) + P(X_n = j, \tau > n)$$

$$P(Y_n = j) = P(Y_n = j, \tau \leq n) + P(Y_n = j, \tau > n)$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{j \in E} |P(X_n = j) - P(Y_n = j)| &= \sum_{j \in E} |P(X_n = j, \tau > n) - P(Y_n = j, \tau > n)| \\ &\leq \sum_{j \in E} (P(X_n = j, \tau > n) + P(Y_n = j, \tau > n)) \\ &= 2P(\tau > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{由于 } P(\tau < \infty) = 1) \end{aligned}$$

特别地, 取 $X_n$ 和 $Y_n$ 的初分布分别为 $\mu = \delta_i$ 和 $\nu = \pi$ , 那么

$$P(X_n = j) = P_{ij}^{(n)}, \quad P(Y_n = j) = \pi_j.$$

定理即证。 ■

**注1.** 不可约Markov链中，非周期正常返的状态称为遍历态(Ergodic state).

**注2.** 这里构造 $Z_n$ 的方法称为耦合方法(Coupling Method)，是概率论中非常重要的证明方法，由于 $X_n$ 和 $Y_n$ 是独立的，这种特殊的耦合称为独立耦合。一般地，两个概率分布 $\mu$ 和 $\nu$ 的耦合(Coupling)定义为同一个概率空间上的一对随机变量 $(X, Y)$ ，满足

$$P\{X = x\} = \mu(x), \quad P\{Y = y\} = \nu(y).$$

更多参考：《Modern Discrete Probability: An Essential Toolkit》，Sébastien Roch，Chapter4.

**注3.** 还可以通过更新定理证明，参考《随机过程及其应用》，陆大綵，张颢，清华大学出版社定理7.3。

**Theorem 6.15** 设 $\{X_n\}$ 是不可约零常返的 Markov 链，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)} = 0, \quad \forall i, j \in E.$$

**Proof:** 参考《应用随机过程》，陈大岳，章复熹，命题1.9.9. ■

不可约Markov链的分类总结如下：

$$\text{不可约} \left\{ \begin{array}{l} \text{常返} \left\{ \begin{array}{l} \text{正常返} \Leftrightarrow \text{有不变分布} \left\{ \begin{array}{l} P_{ij}^{(n)} \rightarrow \pi_j (\text{非周期}) \\ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{(k)} \rightarrow \pi_j (\text{周期}) \end{array} \right. \\ \text{零常返: } P_{ij}^{(n)} \rightarrow 0 \end{array} \right. \\ \text{非常返: } P_{ij}^{(n)} \rightarrow 0 \end{array} \right.$$